

**Задача 1.** Длина, ширина и высота прямой прямоугольной призмы выражаются тремя попарно различными натуральными числами. Сумма числовых значений объема призмы, площади ее полной поверхности и суммы длин всех ее ребер равна 2026. Найдите наименьшее возможное значение объема такой призмы.

**Ответ:** 444

**Решение.** Пусть длины сторон призмы, упорядоченные по возрастанию, равны  $a, b$  и  $c$ , где  $a, b, c \in \mathbb{N}$  и  $a < b < c$ .

Тогда объем, площадь полной поверхности и сумма длин всех ребер равны  $abc, 2ab + 2ac + 2bc, 4a + 4b + 4c$  соответственно. По условию,

$$abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c = 2026.$$

Левая часть уравнения может быть записана в виде  $(a + 2)(b + 2)(c + 2) - 8$ . Тогда

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) = 2026 + 8 = 2034 = 2 \cdot 3^2 \cdot 113.$$

Так как при этом  $3 \leq a + 2 < b + 2 < c + 2$ , то единственной тройкой натуральных чисел, подходящей под условия задачи, будет 3, 6, 113.

Значит,  $a + 2 = 3, b + 2 = 6, c + 2 = 113$ , то есть  $a = 1, b = 4, c = 111$ . Объём призмы равен 444. Это единственное возможное значение.

**Задача 2.** Дан клетчатый квадрат  $101 \times 101$  с занумерованными клетками. Из него нужно вырезать клетчатый прямоугольник меньшего размера так, чтобы квадрат не распался на две части и у оставшейся фигуры не было дырки внутри. Разрезы можно проводить только по линиям сетки. Сколькими способами можно это сделать?

**Ответ:** 2020400

**Решение.** Решим задачу в общем виде — для квадрата  $n \times n$ .

Первый способ. Прямоугольник однозначно определяется двумя горизонталями и двумя вертикалями, но он не может совпадать со всем квадратом. Значит, всего способов выбрать прямоугольник  $(C_{n+1}^2)^2 - 1$ . Вычтем неподходящие случаи. Чтобы получилась дырка внутри, нужно вырезать прямоугольник из «внутреннего» квадрата  $(n - 2) \times (n - 2)$ : получаем  $(C_{n-1}^2)^2$  способов. Чтобы квадрат распался на две части, нужно резать по двум горизонталям или по двум вертикалям: получаем  $2C_{n-1}^2$  способов. Вычитая не подходящие способы, получаем  $(C_{n+1}^2)^2 - 1 - (C_{n-1}^2)^2 - 2C_{n-1}^2 = 2(n - 1)(n^2 - n + 2)$ .

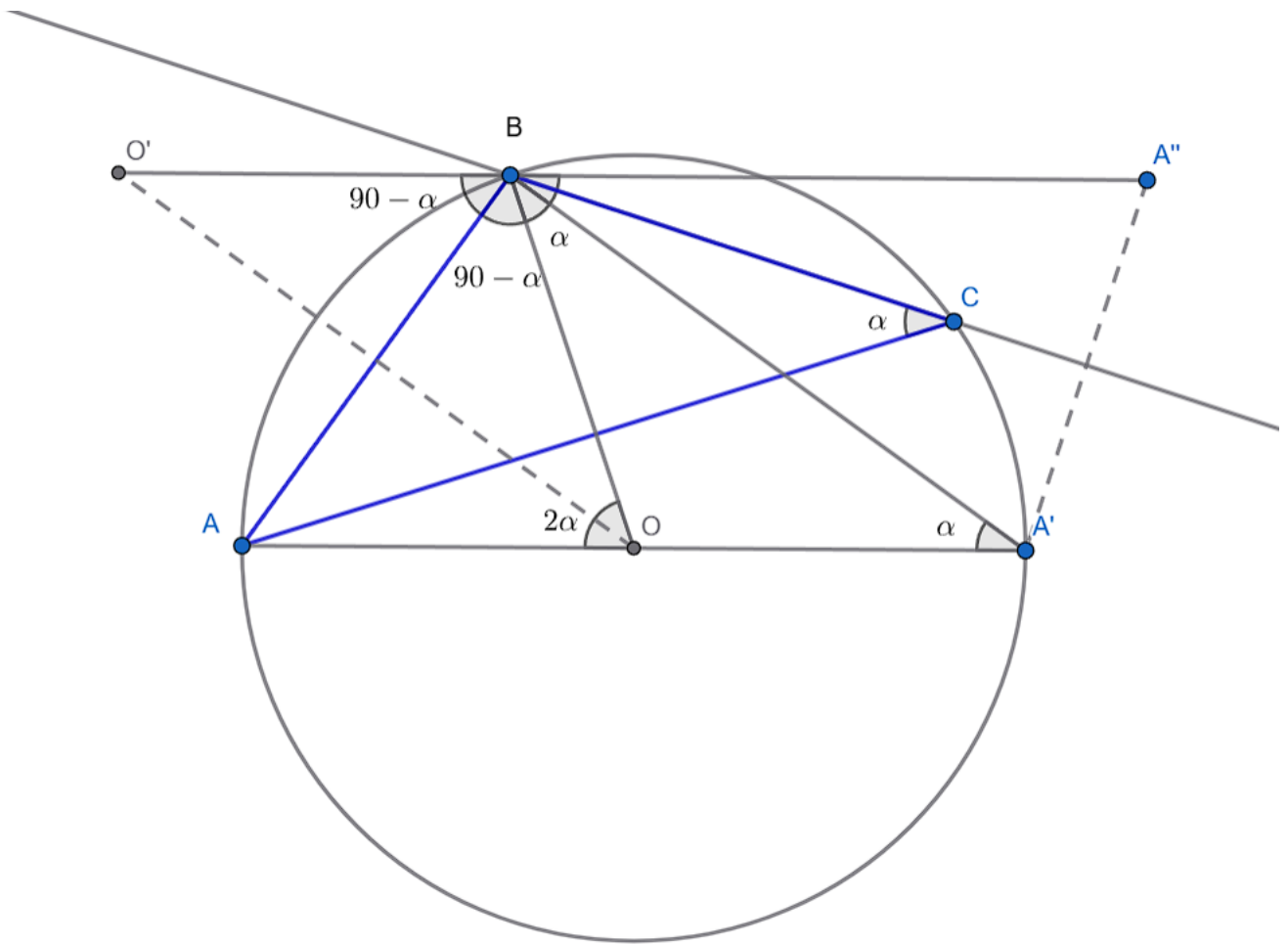
Второй способ. Прямоугольник, который нужно отрезать, будет касаться одной, двух или трёх сторон квадрата. Рассмотрим все эти случаи. Если прямоугольник касается одной стороны, то будет 4 способа выбрать сторону. Допустим, это нижняя сторона. Далее, есть  $C_{n-2}^2$  способов выбрать вертикали и  $n - 2$  способа выбрать горизонталь. Всего  $4C_{n-2}^2(n - 2)$  способов. Если прямоугольник касается двух сторон, то будет 4 способа выбрать их,  $n - 1$  способов выбрать горизонталь и  $n - 1$  способов выбрать вертикаль. Всего  $4(n - 1)^2$  способов. Если прямоугольник касается трёх сторон, то будет 4 способа выбрать эти стороны и  $n - 1$  способов выбрать линию разреза. Всего  $4(n - 1)$  способов. Складывая все способы, получаем  $4C_{n-2}^2(n - 2) + 4(n - 1)^2 + 4(n - 1) = 2(n - 1)(n^2 - n + 2)$ .

Подставляя в полученное выражение  $n = 101$ , получаем ответ: 2020400 способов.

**Задача 3.** Дан треугольник  $ABC$ , вписанный в окружность с центром в точке  $O$ . Угол  $\angle C = 30^\circ$ . Центр окружности симметрично отразили относительно прямой, содержащей сторону  $AB$  — получилась точка  $O'$ . Точку, диаметрально противоположную точке  $A$ , симметрично отразили относительно прямой, содержащей сторону  $BC$ . Получилась точка  $A''$ . Оказалось, что точки  $O', B, A''$  лежат на одной прямой. Найдите угол  $\angle B$ .

**Ответ:**  $105^\circ$

**Решение.**



Рассмотрим треугольник  $ABC$ . Пусть  $\angle BCA = \alpha$ . Тогда  $\angle BA'A = \alpha$ , так как он опирается на ту же дугу. Также заметим, что  $\angle AOB = 2\alpha$ . Поскольку точка  $O'$  симметрична точке  $O$  относительно прямой  $AB$ , то  $AB \perp OO'$ , значит  $\angle O'BA = \angle ABO = 90^\circ - \alpha$ .

Поскольку  $|OB| = |OA'| = R$ , треугольник  $A'OB$  равнобедренный, и  $\angle OBA' = \angle BA'O = \alpha$ .

Так как по условию  $O', B, A''$  лежат на одной прямой, то  $\angle A''BA' = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha + \alpha) = \alpha$ . При этом, поскольку точки  $A', A''$  симметричны относительно прямой  $BC$ , то  $\angle A'BC = \angle A''BC = \frac{\alpha}{2}$ .

Тогда  $\angle ABC = 90^\circ - \alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ .

**Задача 4.** При каких значениях параметра  $a$  множество решений неравенства

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0$$

(относительно неизвестной  $x$ ) представляет собой отрезок длиной 2026?

**Ответ:** при  $a = 2^{-1/2026}$ .

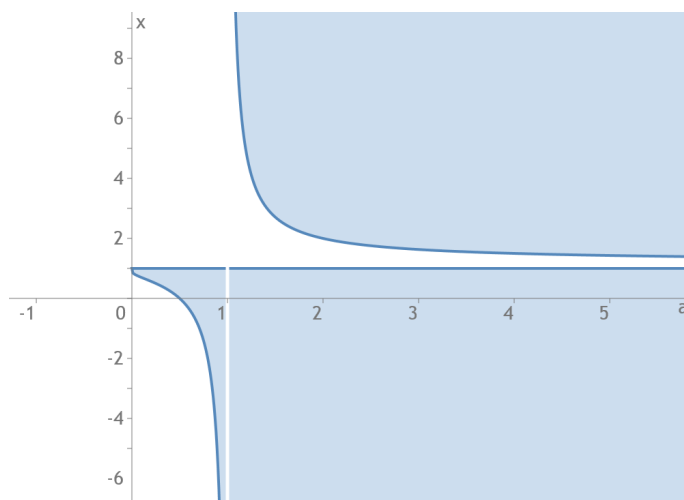
**Решение.** Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{a^{2x} - 3a^{x+1} + 2a^2}{\log_2 a} \geq 0 \iff \frac{(a^x)^2 - 3a \cdot a^x + 2a^2}{a - 1} \geq 0 \iff \frac{(a^x - a)(a^x - 2a)}{a - 1} \geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\left[ \begin{cases} a > 1, \\ (a^x - a)(a^x - 2a) \geq 0, \\ 0 < a < 1, \\ (a^x - a)(a^x - 2a) \leq 0 \end{cases} \right] \iff \left[ \begin{cases} a > 1, \\ \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq \log_a(2a) = 1 + \log_a 2, \end{cases} \\ 0 < a < 1, \\ 1 \geq x \geq \log_a(2a) = 1 + \log_a 2. \end{cases} \right]$$

Изобразим множество решений последней совокупности в осях  $(x, a)$ :



Множество решений исходного неравенства относительно  $x$  при фиксированном  $a = a_0$  есть проекция на ось  $x$  пересечения изображённой на рисунке области с прямой  $a = a_0$ . Ясно, что при  $a > 1$  это множество будет состоять из двух лучей, значения  $a = 1$  и  $a \leq 0$  не входят в область допустимых значений  $a$  в исходном неравенстве, а при  $0 < a < 1$  множеством решений будет отрезок с концами  $1 + \log_a 2$  и  $1$ . Длина этого отрезка равна  $1 - (1 + \log_a 2) = -\log_a 2 = 2026$ , откуда  $a = 2^{-1/2026}$ .

**Задача 5.** Найдите наибольшее значение произведения

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z,$$

где  $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ ,  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ .

**Ответ:**  $3^{\frac{-3}{2}}$

**Решение.** Из условий  $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ ,  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$  следует, что

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x = 1.$$

Действительно, так как  $z = \frac{\pi}{2} - (x + y)$ , то

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x + y)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) = \\ &= \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(x + y)} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{aligned}$$

Из неравенства Коши получаем

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \leq \left( \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{-3}{2}}$$

, и знак равенства будет тогда и только тогда, когда  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$ , то есть при  $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ .

**Задача 6.** В треугольнике  $ABC$  равны углы  $\angle A = \angle C = 32^\circ$ . Внутри треугольника выбрана такая точка  $O$ , что угол  $BCO$  в 2 раза больше угла  $BAO$ , а угол  $OBC$  в 3 раза больше угла  $ABO$ . Во сколько раз угол  $BOA$  больше, чем угол  $BAO$ ?

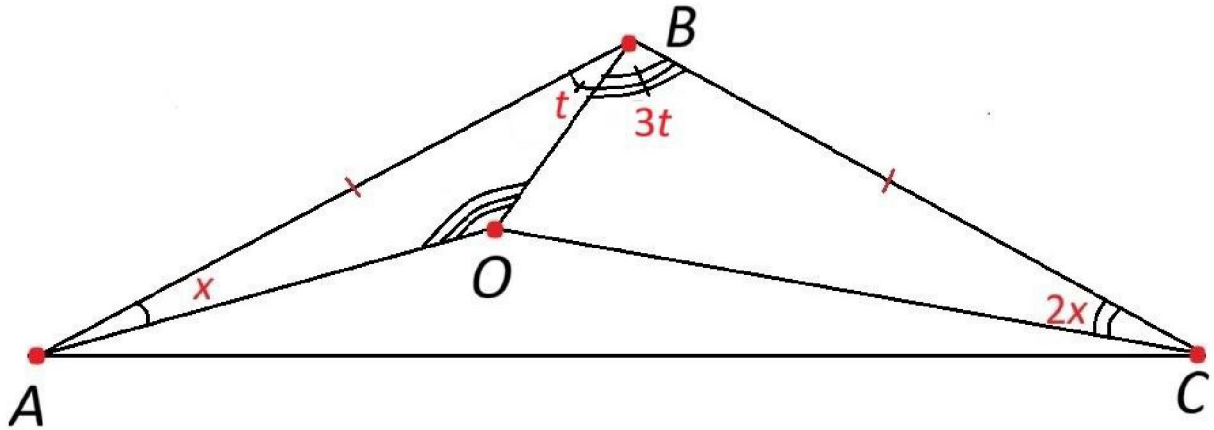
**Ответ:** 150

**Решение.** Решим задачу в общем виде: вместо угла  $32^\circ$  берем угол  $\alpha$  (важно, что  $\alpha > 30^\circ$ ).

Пусть  $\angle B = 4t$ , тогда  $\angle ABO = t, \angle OBC = 3t$ .

При этом из условия вытекает, что  $\angle B = 180 - 2\alpha$ , поэтому  $t = 45 - \frac{\alpha}{2}$ .

Обозначим  $\angle BAO = x$ , тогда  $\angle BCO = 2x$ .



По теореме синусов из треугольников  $BOC$  и  $BOA$  :

$$\frac{BO}{\sin 2x} = \frac{BC}{\sin(\pi - 3t - 2x)}, \quad \frac{BO}{\sin x} = \frac{AB}{\sin(\pi - t - x)}.$$

Исключая  $BO$  и  $BC = AB$ , получим

$$\frac{\sin 2x}{\sin(3t + 2x)} = \frac{\sin x}{\sin(t + x)}$$

$$2 \cos x \sin(t + x) = \sin(3t + 2x).$$

Превратим в левой части произведение в сумму:

$$\sin(t + 2x) + \sin t = \sin(3t + 2x),$$

$$\sin t = \sin(3t + 2x) - \sin(t + 2x).$$

Обратно перейдём к произведению:

$$\sin t = 2 \cos(2t + 2x) \sin t$$

$$\cos(2t + 2x) = \frac{1}{2}$$

$$2t + 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = -t \pm \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Так как  $x$  — острый угол, единственным решением будет

$$x = \frac{\pi}{6} - t = 30^\circ - 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - 15^\circ.$$

Значит,  $\angle BAO = \frac{\alpha}{2} - 15^\circ$ , поэтому

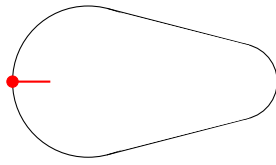
$$\angle BOA = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right) - \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 150$$

Значит, искомое отношение равно

$$\frac{150^\circ}{\frac{\alpha}{2} - 15^\circ} = \frac{300}{\alpha - 30}.$$

Возможно также решение, не использующее тригонометрию — для него надо провести высоту  $BH$ , обозначить пересечение  $BH$  и  $OC$  как точку  $P$ , заметить равенство треугольников  $ABP$  и  $CBP$  и записать сумму углов треугольника  $ABP$ .

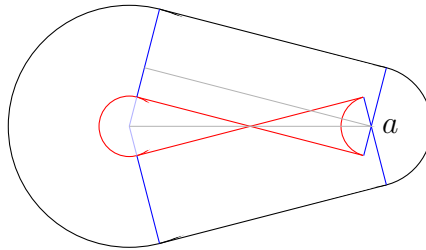
**Задача 7.**



Газонокосильщик участвует в гонке по трассе указанной формы (состоит из двух дуг окружностей и касающихся их прямых, радиусы окружностей 4 и 1, расстояние между центрами окружностей равно 6). Саму косилку можно считать маленькой, точкой. Скошенную траву она отбрасывает на расстояние 1.5 в сторону, направо, перпендикулярно направлению своего движения. Косилка ездит по часовой стрелке, соответственно, скошенная трава окажется внутри трассы. После того, как газонокосильщик завершил круг, внутри трассы вырисовалась замкнутая дорожка из скошенной травы. Найдите её длину.

**Ответ:**  $6\sqrt{3} + \frac{11\pi}{3}$

**Решение.** Пусть радиусы кругов равны  $R, r$ , расстояние между центрами кругов равно  $L$ , отступ равен  $h$ . При этом во всех вариантах  $R > h > r$ .



Дорожка изображена красной линией. Прямолинейные куски трассы остались прямолинейными и сохранили свою длину, дуги окружностей превратились в дуги радиусов  $R - h, |r - h|$ . Правая дуга при этом «вывернулась».

Чтобы найти угол наклона прямолинейного куска, параллельно сдвинем его, пока его конец не окажется в центре правой окружности. Посмотрим на серый треугольник — он прямоугольный, с гипотенузой  $L$  и катетом  $R - r$ . Угол  $a$  в этом треугольнике равен  $\arcsin \frac{R-r}{L}$ . Длины прямолинейных участков трассы равны второму катету треугольника, по теореме Пифагора это  $\sqrt{L^2 - (R - r)^2}$ . Угол левой дуги равен  $\pi + 2 \arcsin \frac{R-r}{L}$ , угол правой равен  $\pi - 2 \arcsin \frac{R-r}{L}$ .

Общая длина получается такая:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{L^2 - (R - r)^2} + \left( \pi + 2 \arcsin \frac{R - r}{L} \right) (R - h) + \left( \pi - 2 \arcsin \frac{R - r}{L} \right) (h - r) = \\ & = 2\sqrt{L^2 - (R - r)^2} + \pi(R - r) + (2R + 2r - 4h) \arcsin \frac{R - r}{L}. \end{aligned}$$

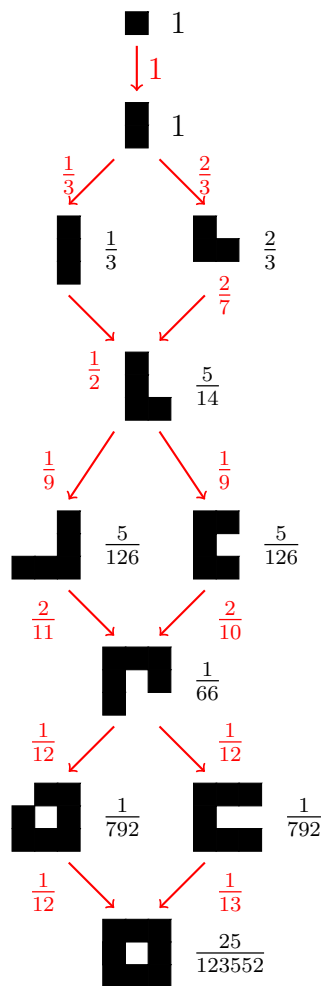
**Задача 8.** Робот Казимир решил создать шедевр. На неограниченном клетчатом поле он закрашивает клетку чёрным, а потом поочерёдно красит ещё 8 квадратов, каждый раз выбирая клетку под покраску наугад из соседних к уже закрашенным (соседство по диагонали не подходит, нужна как минимум одна общая сторона).

С какой вероятностью своим последним штрихом он превратит «кольцо» в чёрный квадрат (размерами 3 на 3)?



**Ответ:**  $\frac{25}{1606176}$

**Решение.** Изобразим все возможные промежуточные раскраски, которые не ведут к заведомой неудаче, совмещая вместе те случаи, которые можно перевести друг в друга сдвигом, отражением или поворотом. Цветными стрелками будем отмечать возможность перейти от одного рисунка к другому с вероятностями таких переходов (для подсчёта которых достаточно перебрать возможных новых соседей), а справа от рисунков чёрным цветом напомним суммарную вероятность оказаться на соответствующем шагу в такой конфигурации. Сначала нам нужно получить «кольцо», что сильно ограничивает возможные варианты:



Ну а на последнем шаге вероятность попасть в центр равна  $\frac{1}{13}$ , поэтому ответ равен

$$\frac{25}{123552} \cdot \frac{1}{13} = \frac{25}{1606176}.$$